UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
Revista Científica
http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/index
CIDC

Diagramas de Minkowski, evidencia geométrica de las consecuencias de la Teoría Especial de la Relatividad (TER)

Minkowski diagrams, geometric evidence of the consequences of the TER

Diagramas de Minkowski, evidência geométrica das conseqüências do TER

Juan Manuel Peña Díaz[1]

Yecid Javier Cruz Bonilla[2]

Resumen

La relatividad especial une el espacio y el tiempo en un solo ente llamado Espacio-Tiempo. Minkowski fue uno de los que analizo este Espacio-Tiempo y demostró geométricamente que usando este concepto, el tiempo y el espacio no son invariantes a velocidades cercanas a la de la luz, para ello desarrolló los diagramas (de Minkowski) para lograr evidenciar la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud. En este sentido, se propone la realización de un taller sobre el uso de los diagramas para representar geométricamente la contracción de la longitud y la dilatación. Con esta actividad se quiere mostrar que estos diagramas pueden constituir una herramienta didáctica para propiciar un mayor entendimiento por parte del estudiante sobre las consecuencias de la Teoría Especial de la Relatividad.
Palabras Claves: Espacio-Tiempo, Evento, Geometría, Marcos Inerciales, Velocidad de la Luz.

Abstract

Special relativity unites space and time in a single entity called Space-Time. Minkowski was one of those who analyzed this Space-Time and showed geometrically that using this concept, time and space are not invariant at speeds close to that of light, for this he developed the diagrams (of Minkowski) to achieve evidence of dilatation of time and the contraction of length. In this sense, we propose the realization of a workshop on the use of diagrams to represent geometrically the contraction of the length and time dilation. With this activity it is wanted to show that these diagrams can constitute a didactic tool to propitiate a greater understanding on

[1] Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. Contacto: jmpenad@upn.edu.co
[2] Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. Contacto: ycruz@upn.edu.co

the part of the student on the consequences of the special theory of the relativity.
Keywords: Event, Inertial Frames, Geometry, Space-Time, Speed of Light.

Resumo
A relatividade especial une espaço e tempo em uma única entidade chamada Espaço-Tempo. Minkowski foi uma que analisar este espaço-tempo e demonstrou geometricamente que a utilização deste conceito, o tempo e o espaço não são invariantes perto da velocidade da luz, por isso desenvolvido diagramas (Minkowski) para atingir evidência dilatação do tempo e da contração do comprimento. Neste sentido, propomos a realização de uma oficina sobre o uso de diagramas para representar geometricamente a contração da dilatação do comprimento e do tempo. Com essa atividade pretende-se mostrar que esses diagramas podem constituir uma ferramenta didática para propiciar uma maior compreensão por parte do aluno sobre as consequências da teoria especial da relatividade.
Palavras-chave: espaço-tempo, evento, quadros inerciais, geometria, velocidade da luz.

INTRODUCCIÓN

Para el desarrollo del taller es necesario ubicar a los asistentes en la problemática que causo el desarrollo de estos diagramas mostrando que la Teoría Especial de la Relatividad trata un problema de la física del siglo XX y es que cuando aplicamos las leyes de Maxwell a un marco de referencia en movimiento respecto a otro inmóvil existen discrepancias entre la teoría y la experimentación. Einstein en 1905 propone su principio de la relatividad "Las leyes físicas deben ser las mismas sin importar el marco de referencia" (Quevedo, 2005) Einstein asume que la velocidad de la luz tiene la misma magnitud para cualquier marco de referencia, en movimiento o inmóvil.

Desarrolla la teoría de la relatividad especial, donde une el espacio y el tiempo formando el Espacio-Tiempo. Minkowski busca mostrar este nuevo concepto usando marcos de referencia adaptados a los conceptos nuevos, mostrando la diferencia entre los marcos de referencia clásicos y los marcos de referencia del Espacio-Tiempo.

Clásicamente, el espacio y el tiempo son variables independientes:

$$[Tiempo] = [s] \qquad [Espacio] = [m]$$

El marco de referencia es clásico (tiempo *vs* posición), pero el Espacio-Tiempo es una mezcla entre ambas y para lograr tener un marco de referencia en este espacio debemos medir todo de la misma manera (deben tener la mismas unidades) para ello debemos utilizar una constante, la velocidad de la luz (Fig. 1).

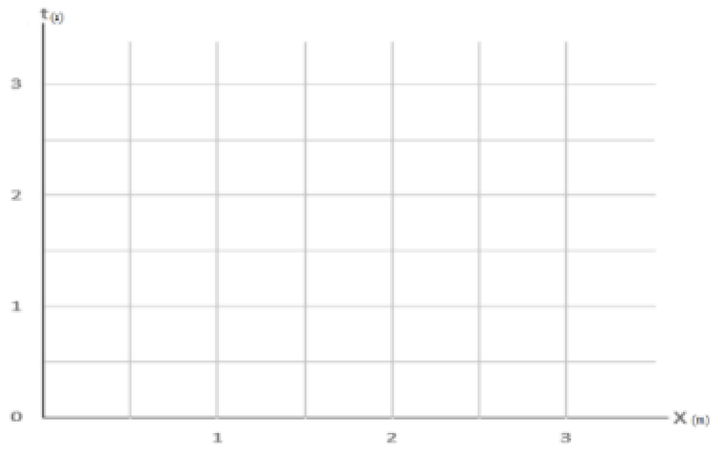

Figura 1. Gráfico de posición contra tiempo. Fuente: Elaboración propia de los autores.

Para lograr crear el Espacio-Tiempo se multiplica la variable temporal por la velocidad de la luz para que sus unidades dimensionales sean iguales a las del espacio, con la salvedad que ahora serán llamadas metros de tiempo (Taylor y Wheeler, 1993), y cambiando la representación de los marcos de referencia:

$$[C * Tiempo] = [m] \quad [Espacio] = [m]$$

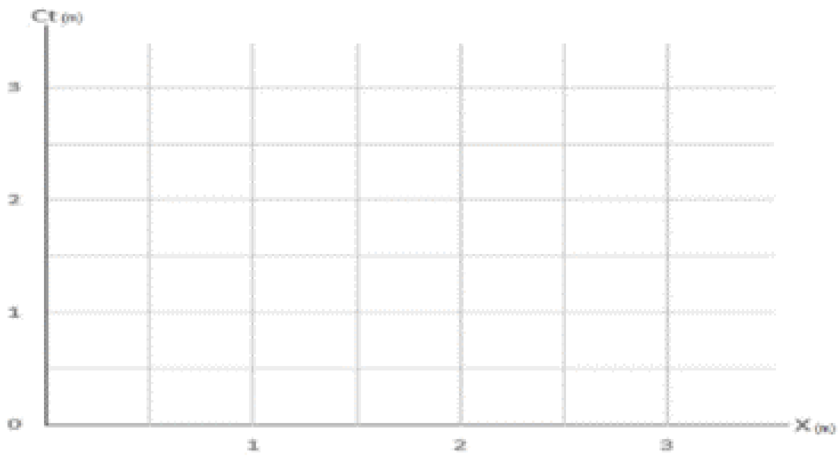

Figura 2. Gráfico de metros segundo contra metros. Las unidades son metros tanto en eje temporal y el eje espacial (ahora las unidades del eje temporal se llamaran metros de tiempo). Fuente: Elaboración propia de los autores.

Luego se explicara la manera cómo se miden distancias en el Espacio-Tiempo ya que este concepto de distancia en la relatividad especial la separa de la física clásica, porque la primera se desarrolla sobre en una geometría curva, mientras la segunda se desarrolla sobre una geometría plana. Para explicar un poco la diferencia entre estas geometrías:

si se realizan dos líneas paralelas y se extienden al infinito una geometría plana éstas nunca se tocarán, mientras que en una geometría curva es posible que al extender las líneas paralelas, éstas más adelante se corten.

En la física clásica la distancia entre dos puntos separados en el espacio se halla con la ecuación:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (1)$$

Siendo el *ds* la distancia entre los puntos en el espacio.

Para el Espacio-Tiempo, la distancia entre puntos está dada por:

$$ds^2 = Cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (2)$$

Esta definición de distancia es importante debido a que el asistente debe poder entender que es la misma para cualquier marco sin importar su estado de movimiento:

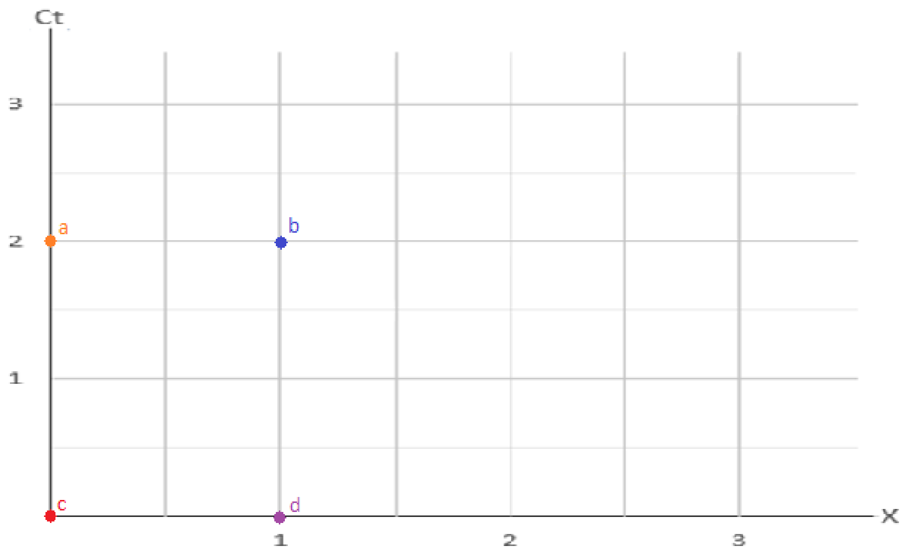

Figura 3. Gráfico Espacio temporal. *a*, *b*, *c*, *d* son eventos ubicados en el sistema de referencia, se denota que *a* y *c* ocurren en el mismo espacio pero en tiempos diferentes, mientras que *a* y *b* están en el mismo tiempo pero en diferentes espacios. Fuente: Elaboración propia de los autores.

Desde este punto se dibujan los primeros marcos de referencia para introducir la idea de líneas de mundo, poniendo de ejemplo la componente temporal ya que siempre está en movimiento (el tiempo siempre corre, nunca se detiene o retrocede), se pedirá que dibujen las líneas de tiempo de diferentes objetos, para que evidencien como cambian dependiendo su estado de movimiento (Fig.4).

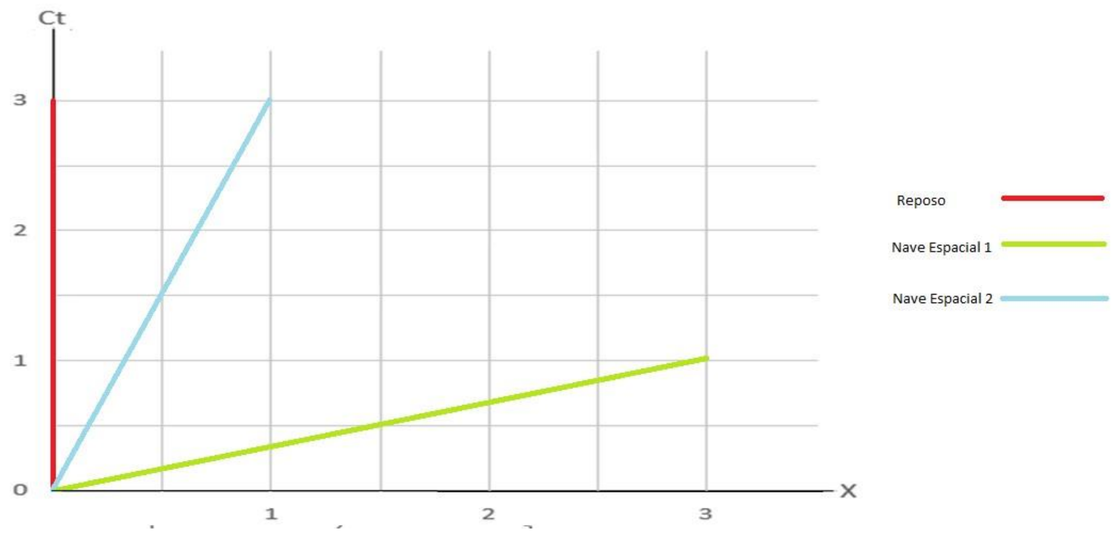

Figura 4: Líneas de Mundo. En el marco de referencia la línea de mundo para un objeto en reposo, que solo se extendería en la dimensión temporal; mientras que para las dos naves espaciales, al recorrer espacio se mueve tanto en la dimensión temporal. Fuente: Elaboración propia de los autores.

Una línea de tiempo muy importante es la que genera la luz en el Espacio-Tiempo ya que la luz se mueve a la misma velocidad en cualquier dirección, entonces en el eje temporal la luz se deberá mover de la misma manera que en el eje espacial (Fig. 5).

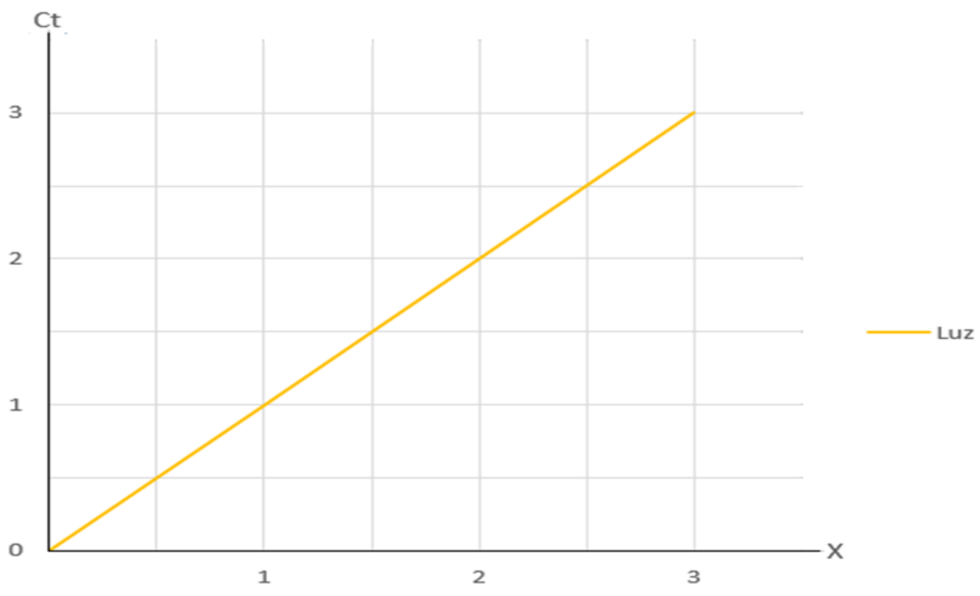

Figura 5: Línea de mundo de la luz. La luz se mueve en línea recta en estos diagramas Espacio-Tiempo por lo tanto se puede expresar cualquier línea de tiempo (cuerpos moviéndose a velocidades constantes), como una función lineal de la forma $Ct = \frac{v}{c}x$, donde cuando $v = c$ queda escrito $Ct = x$ (una línea recta). Fuente: Elaboración propia de los autores.

Representación de los marcos inerciales en los diagramas de Minkowski

Para relacionar los marcos inerciales se deben usar las ecuaciones deducidas de la Teoría Especial de la Relatividad Especial (4)

$$Ct' = \gamma(Ct - \beta x) \quad (3) \qquad x' = \gamma(x - \beta Ct) \qquad (4)$$

Siendo β = v/C, siendo *v* la velocidad del marco y *C* la velocidad de la luz.

Se realizara la analogía de estas ecuaciones con las transformaciones de coordenadas usadas cuando se hacen rotar los ejes en el plano cartesiano (Fig.6).

$$x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (5)$$

$$y' = y\cos\theta - x\ \mathrm{sen}\,\theta \qquad (6)$$

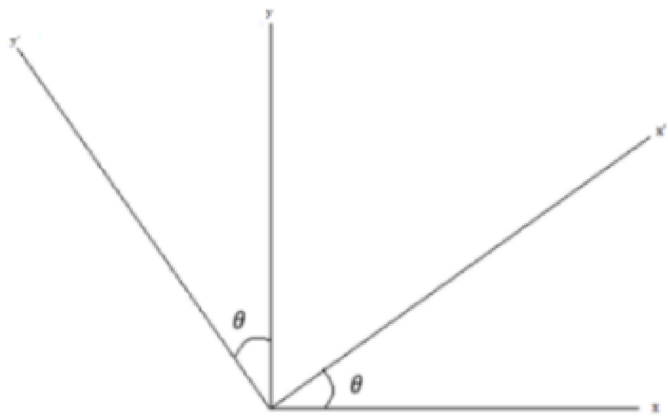

Figura 6: Rotación de ejes. Minkowski notó un parecido entre las ecuaciones de transformación y las usadas para hacer rotar los ejes en un plano coordenado. Fuente: Elaboración propia de los autores.

Mostrando las siguientes relaciones $\gamma = \mathrm{Cos}\,\theta$ y $\gamma\beta = Sen\ \theta$, como se interpretan en las ecuaciones dadas en la Teoría Especial de la Relatividad y como quedarían escritas:

$$Ct' = Ct\ Cos\ \theta + x\ Sen\ \theta \qquad (7)$$

$$x' = x\ Cos\theta + Ct\ Sen\theta \qquad (8)$$

Al verlo de esa manera podemos deducir $\tan\theta = \frac{v}{c}$, interpretando un marco en movimiento como una rotación de ejes en referencia al marco referencia inmóvil, también con esta relación podemos hallar el ángulo de inclinación de los ejes primados solo conociendo la velocidad del movimiento, para posteriormente dibujar estos ejes rotados (Fig.7).

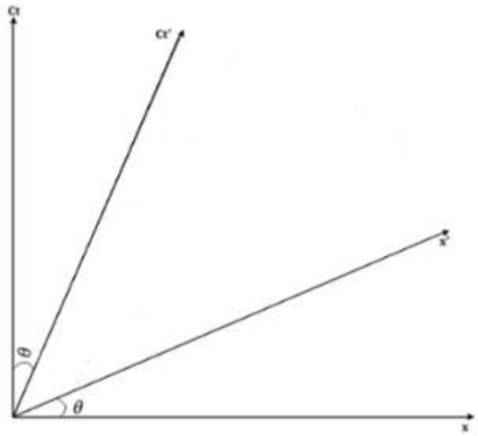

Figura 7: Rotación de ejes Espacio-Tiempo. Se denota el carácter positivo de la ecuación (7) debido que los ejes traslados se encuentran en el lado positivo del marco. Fuente: Elaboración propia de los autores.

Estos ejes rotados serán los marcos de referencia para objetos a velocidades cercanas a la de la luz, se procedió a hacer notar las consecuencias de la Teoría Especial de la Relatividad como son la contracción de la longitud y la dilatación del tiempo.

Gráfica de Hipérbolas

Para hacer notar estas consecuencias en los marcos se usó el intervalo Espacio-Tiempo ya que este es el mismo para todos los objetos en el Espacio-Tiempo, pero solo haciendo uso de dos dimensiones, para lograr su utilización en los diagramas ya realizados:

$$ds^2 = C^2dt^2 - dx^2 \qquad (9)$$

Para lograr colocar este intervalo en los diagramas se hará la analogía con la ecuación de una hipérbola, desarrollando su grafica en el diagrama. Para ello se igualara a 1 y a -1 el intervalo Espacio-Tiempo debido a que cortará en esos puntos del marco en reposo y se interpretará como la unidad medida en el marco en reposo, este procedimiento se realizará con la ayuda de un curvígrafo.

$$C^2dt^2 - dx^2 = \;\; 1 \qquad (10)$$

$$C^2dt^2 - dx^2 = -1 \qquad (11)$$

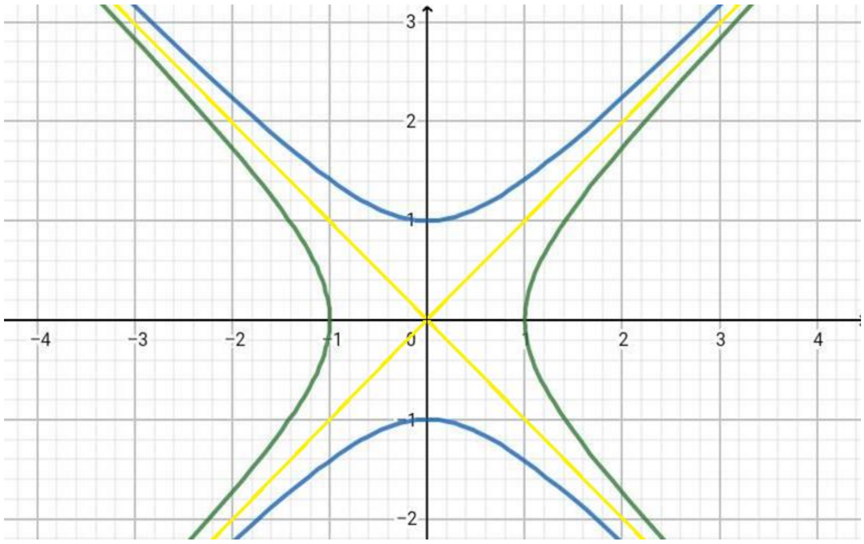

Figura 8: Gráfica de las parábolas de calibración. Se iguala expresión del intervalo espacio-tiempo a uno y a menos uno, siendo interpretada como la unidad de longitud medida por el marco en reposo. Fuente: International GeoGebra Institute

Diagramas de Minkowski

Después de dibujar las parábolas se podrán realizar los marcos de referencia de cuerpos en movimiento y evidenciar que la unidad de medida del objeto en movimiento será ahora donde la parábola corte al eje rotado, interpretando que ahora el tiempo y el espacio son percibidos diferentes para un objeto a velocidades cercanas a la luz, este producto final son los diagramas de Minkowski, con su respectiva interpretación, en ellos se logran notar las consecuencias de la relatividad especial de manera sencilla solo con el uso de rotaciones de ejes y grafica de parábolas.

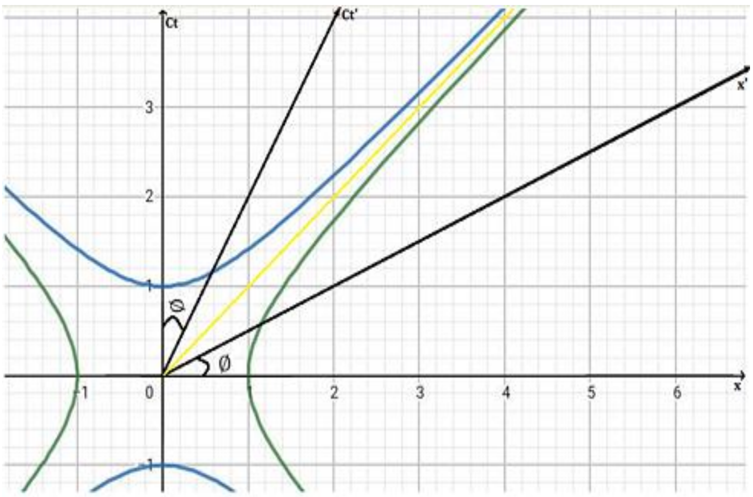

Figura 9: Parábolas y ejes. Se colocan los ejes ya rotados y se evidencia que estos tocan a la hipérbola, ese punto será la longitud medida en el marco en movimiento (Siendo la luz, la línea amarilla). Fuente: Internacional GeoGebra Institute.

CONCLUSIONES

Para culminar la actividad se reflexionará sobre la utilidad de estos diagramas para que un estudiante logre evidenciar las consecuencias de la Teoría Especial de la Relatividad de manera clara, sin la necesidad del desarrollo de demostraciones que puedan confundirlo y lo aburran, si no que al realizar estos diagramas de manera activa se apropie mejor del conocimiento y entienda la trascendencia y diferencia de esta teoría moderna con la teoría clásica. Todo esto tan solo con el uso de planos cartesianos que representan marcos inerciales, papel, lápiz, curvígrafo y regla.

REFERENCIAS

Acín A., y Acín E. (2016). *Persiguiendo A Einstein De La Intuición a las Ondas Gravitacionales.* España: Bonalletra Alcompas, S. L.

International GeoGebra Institute. (2018). Gráfica de las parábolas de calibración. Parábolas y ejes. Recuperado de http://www.geogebra.org

Quevedo H. (2005). *Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento.* Traducción "Zur Elektrodynamik bewegter Kórper". *Annalen der Physik*, 17, 891–921 (1905). Recuperado de http://webs.ftmc.uam.es/juancarlos.cuevas/Teaching/articulo-original.pdf

Taylor E., y Wheeler J. (1993). *SpaceTime Physics.* Nueva York: W.H. Freeman and Company